Digitale Bibliothek Braunschweig

Über Geradenhüllbahnen bei ebenen äquiformen Zwangläufen

Pottmann, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 35, 1983, S.25-30

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052698

Digitale Bibliothek Braunschweig

Über Geradenhüllbahnen bei ebenen äquiformen Zwangläufen

Von **Helmut Pottmann,** Wien

Vorgelegt von H.R. Müller

(eingegangen am 10.12.1982)

Ein äquiformer Zwanglauf kann dadurch angegeben werden, daß man für drei nicht kopunktale Geraden g_i $(i=1,2,3)$ der Gangebene $\sum$ die Hüllkurven k_i in der Rastebene $\sum_0$ vorschreibt. Eine solcherart mit Kreisen als Führungskurven k_i definierte Bewegung hat H. SCHAAL [9] betrachtet und dabei u.a. festgestellt, daß sämtliche Geraden aus $\sum$ Kreise einhüllen oder durch Stützpunkte laufen. Schrumpfen alle drei Führungskreise k_i auf Punkte, so gilt dies gleichzeitig für alle anderen Geradenhüllbahnen (L. BURMESTER [1, S. 877]). Angeregt durch diese Sonderfälle werden in der vorliegenden Note Sätze von folgendem Typ vorgeführt: *Gleiten drei Geraden g_i aus $\sum$ längs dreier Kurven k_i aus einer Kurvenfamilie* F, *so hüllen alle Geraden $g\in\sum$ Kurven $k\in$ F ein.*

1. Wir verwenden in $\sum_0$ ein kartesisches Koordinatensystem $(O;x,y)$ und wählen den Drehwinkel u von $\sum$ gegenüber $\sum_0$ als Parameter. Die Lagen der Geraden $g_i\in\sum$ in $\sum_0$ sind als

$$(1)\qquad \begin{aligned} &g_i\colon\ f_i(u)\equiv x\sin(u+u_i)-y\cos(u+u_i)-h_i(u+u_i)=0,\\ &u_i=\text{const}\in\mathbf{R}\ (i=1,2,3),\ u\in\mathrm{I}\subset\mathbf{R}\end{aligned}$$

anzusetzen; dabei sind die $h_i(u)$ die *Stützfunktionen der Führungskurven k_i*. Die Geraden g_i und g_j schließen den konstanten Winkel u_i-u_j ein. Sie repräsentieren somit tatsächlich die ähnlich-veränderliche Gangebene, sofern sie für jedes $u\in\mathrm{I}$ nicht kopunktal und auch nicht paarweise parallel vorausgesetzt werden, d.h.

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} &h_1(u+u_1)\sin(u_2-u_3)+h_2(u+u_2)\sin(u_3-u_1)+\\ &+h_3(u+u_3)\sin(u_1-u_2)\neq 0.\end{aligned}$$

Die Lagen jeder beliebigen Geraden $g\in\sum$ lassen sich nun durch

$$(2)\qquad g\colon \sum_{i=1}^{3}\lambda_i f_i(u)=0,\ \lambda_i\in\mathbf{R},\ \text{nicht alle }\lambda_i=0$$

beschreiben: Zum Beweis fassen wir für jedes $u\in\mathrm{I}$ die g_i als Spuren der Ebenen

$$(3)\qquad \varepsilon_i\colon\ e_i(u)\equiv x\sin(u+u_i)-y\cos(u+u_i)+z-h_i(u+u_i)=0$$

in der Spurebene $\sum_0$: $z=0$ auf. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ bestimmen im $\mathbf{R}^3$ ein *starres Dreiflach* Δ. Der äquiforme Zwanglauf $\sum/\sum_0$ überträgt sich auf eine Bewegung des durch Δ repräsen-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052698

Digitale Bibliothek Braunschweig

tierten Bündels Λ, bei welcher jede Ebene aus Λ ihre Neigung gegenüber Σ_0 beibehält. Die durch

$$(4) \qquad \varepsilon: \sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i(u) = 0$$

angesetzte Ebene ε gehört dem Bündel Λ an; ihre Spur g in Σ_0 macht daher den Zwanglauf Σ/Σ_0 mit. Wegen der Voraussetzung (1*) ist jedes $g \in \Sigma$ gemäß (2) darstellbar. Aus (2) folgt als Stützfunktion der Hüllbahn k von g:

$$(5) \qquad h(u) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i h_i(u+u_i) \text{ mit}$$

$$\lambda^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \cos(u_1-u_2) + 2\lambda_1\lambda_3 \cos(u_1-u_3) + 2\lambda_2\lambda_3 \cos(u_2-u_3),$$

sofern die Ausgangslage für die Messung des Winkels u für jedes g geeignet gewählt wird. Dieser einfache Zusammenhang zwischen den Stützfunktionen der Führungskurven k_i und der allgemeinen Hüllbahnen ermöglicht uns nun die Angabe von Sätzen des eingangs erwähnten Typs.

2. Werden n ebene starre Systeme $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ gegenüber der ruhenden Ebene Σ_0 derart bewegt, daß sich jedes System Σ_j um einen Punkt $A_{j-1} \in \Sigma_{j-1}$ mit konstanter gegen Σ_0 gemessener Winkelgeschwindigkeit $\omega_j \neq 0$ dreht, so vollführt Σ_n gegenüber Σ_0 im Sinne von W. WUNDERLICH [11] eine *Planetenbewegung n-ter Stufe* P_n; deren Punktbahnen werden *Radlinien n-ter Stufe* mit der *Charakteristik* $\omega_1 : \dots : \omega_n$ genannt. Die als *zykloidale Radlinien* bezeichneten Geradenhüllbahnen von P_n sind Radlinien der Stufe $\leqq 2n-1$ und können bei allgemeiner Lage des Zentrums A_0 im Koordinatensystem $(O; x, y)$ durch eine Stützfunktion der Bauart

$$(6) \qquad h(u) = d \cos u + e \sin u + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos m_j u + b_j \sin m_j u) + c$$

$$\text{mit } m_j = (\omega_j/\omega_n) - 1, \; a_j, b_j, c, d, e = \text{const} \in \mathbf{R}$$

gekennzeichnet werden [13, S. 172]. Bei Verwendung zykloidaler Radlinien als Führungskurven k_i führt eine Linearkombination der Stützfunktionen h_i gemäß (5) wieder auf eine Stützfunktion h der Bauart (6); damit hüllt jede Gerade $g \in \Sigma$ eine zykloidale Radlinie ein. Zur Bestimmung der Bahn eines Punktes $X \in \Sigma$ lege man durch X zwei verschiedene Geraden $g, \bar{g} \in \Sigma$. Die Bahn von X ist als *Isoptische* der Hüllkurven $k, \bar{k}$ dieser beiden Geraden eine höhere Radlinie [11], und es gilt der die einleitend genannten Sonderfälle für $n = 1$ umfassende:

Satz 1: *Gleiten drei nicht kopunktale Geraden einer ähnlich-veränderlichen Ebene* Σ *auf drei zykloidalen Radlinien* k_i $(i = 1, 2, 3)$, *so hüllt jede Gerade des Systems* Σ *eine zykloidale Radlinie ein, und die Punkte aus* Σ *durchlaufen höhere Radlinien.*

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052698

Digitale Bibliothek Braunschweig

In der Theorie der Radlinien wird weiters zwischen zykloidalen Radlinien *im engeren Sinn* ($c = 0$)[1]) und solchen *im weiteren Sinn* ($c \neq 0$) unterschieden.

Satz 1*: *Sind die Führungskurven k_i aus Satz 1 zykloidal im engeren Sinn, so gilt dies auch für alle übrigen Geradenhüllbahnen. Ist hingegen mindestens ein k_i zykloidal im weiteren Sinn, so existiert im bewegten System $\sum$ ein Strahlbüschel, dessen Geraden zykloidale Radlinien im engeren Sinn einhüllen.*

Beweis: Wir nehmen an, daß mindestens ein k_i zykloidal im weiteren Sinn ist, d.h. für die in den Stützfunktionen h_i von k_i auftretenden additiven Konstanten gelte $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$. Geraden aus $\sum$, welche zykloidale Radlinien im engeren Sinn einhüllen, rühren von Ebenen $\varepsilon \in \Lambda$ her, die durch

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i c_i = 0$$

gekennzeichnet sind. Diese Ausnahmsebenen bilden demnach ein Büschel. Sind hingegen alle drei k_i zykloidal im engeren Sinn, d.h. $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, so ist (7) stets erfüllt.

Die Evolute k^* einer durch ihre Stützfunktion $h(u)$ beschriebenen ebenen Kurve k besitzt (nach einer Viertelschwenkung um den Ursprung O) die Stützfunktion

$$(8) \qquad h^*(u) = \dot{h}(u) = dh/du.$$

Damit erkennt man, daß die Evolute k_2 einer zykloidalen Radlinie k_1 wieder eine zykloidale Radlinie ist. Sei k_3 die Evolute von k_2, so erhalten wir bei Verwendung dieser Kurven als Führungskurven:

Satz 2: *Durchlaufen zwei Punkte P, Q einer ähnlich-veränderlichen Ebene $\sum$ eine zykloidale Radlinie k_1 und deren Evolute k_2, wobei Q stets das zu P gehörige Krümmungszentrum von k_1 ist, so beschreiben alle Punkte aus $\sum$ Radlinien, und alle Geraden aus $\sum$ hüllen zykloidale Radlinien ein. Zu den letzteren zählen insbesondere die Evolutoiden von k_1 als Hüllbahnen der P enthaltenden Geraden; sie sind gleichzeitig die Bahnen der Punkte des Kreises über dem Durchmesser PQ.*[2])

Weiters erkennen wir, daß die *Zwischenevoluten* einer zykloidalen Radlinie – als Bahnen der Punkte X auf der Geraden PQ beim äquiformen Zwanglauf $\sum/\sum_0$-höhere Radlinien sind.

Abb. 1 zeigt als Beispiel die durch die Stützfunktion

$$h_1(u) = \sqrt{2}\,(\sin \frac{u}{2} + \cos \frac{u}{2} + \sin \frac{3u}{2} - \cos \frac{3u}{2}) - 2$$

[1]) Im Sonderfall $n = 1$ sind dies die Stützpunkte.

[2]) Räumliche Verallgemeinerungen finden sich in [8]; eine Erweiterung von Satz 2 auf Radlinien, welche zwar selbst nicht zykloidal, jedoch *affin* zu zykloidalen Radlinien sind, hat der Verfasser in [5] angegeben.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052698

Digitale Bibliothek Braunschweig

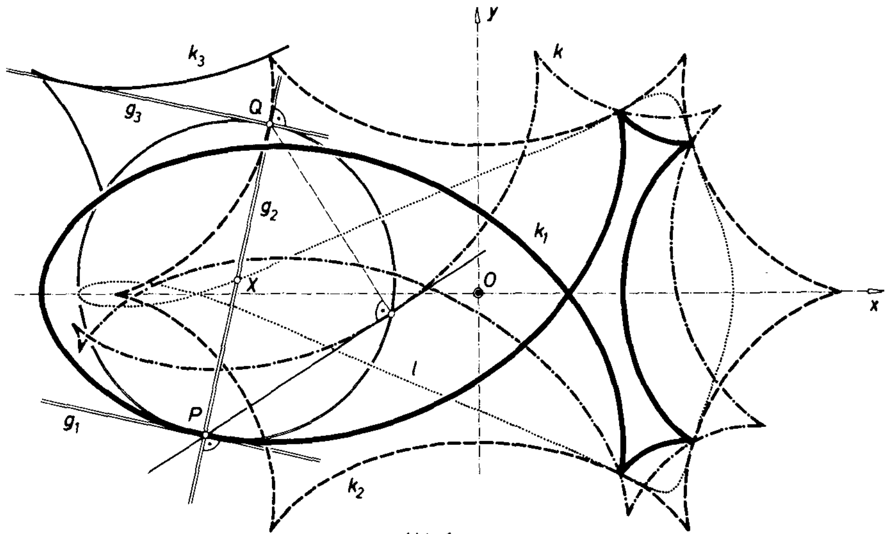

Abb. 1

beschriebene zykloidale Radlinie k_1 im weiteren Sinn mit der Charakteristik $-1:1:2:3:5$; dieselbe Charakteristik besitzen auch die Evolutoide k und die Zwischenevolute l von k_1. k_2 und k_3 sind zykloidal im engeren Sinn mit der Charakteristik $-1:1:3:5$.

3. Zu den zykloidalen Radlinien zählen insbesondere (für $n=2$) die *Epi-* und *Hypozykloiden*. Sie gehören gemeinsam mit den *Hyperzykloiden, Parazykloiden* und *logarithmischen Spiralen* zur Familie der *zykloidalen Kurven*; diese sind durch Stützfunktionen der Bauart

(9) $\qquad h(u) = d \sin u + e \cos u + g(u), \quad d, e = \text{const} \in \mathbf{R}$

zu kennzeichnen, wobei $g(u)$ die Differentialgleichung

(10) $\qquad \ddot{g}(u) + \mu g(u) = 0$

löst [2]. Die reelle Zahl μ heißt *Modul* der zykloidalen Kurve; mit $\mu = 0$ schließen wir auch die *Kreisevolventen* ein.

Sind h_i ($i = 1, 2, 3$) die Stützfunktionen dreier zykloidaler Kurven mit demselben Modul μ, so beschreibt infolge der Linearität von (10) auch jede Linearkombination nach dem Muster (5) eine zykloidale Kurve mit dem Modul μ:

Satz 3: *Gleiten drei nicht kopunktale Geraden der ähnlich-veränderlichen Ebene Σ auf drei zykloidalen Kurven mit demselben Modul μ, so hüllt jede Gerade aus Σ eine zykloidale Kurve mit dem Modul μ ein.*

Ein entsprechend Satz 2 formuliertes Analogon für zykloidale Kurven findet sich bei W. WUNDERLICH [10].

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052698

Digitale Bibliothek Braunschweig

4. Nach (8) werden die *Evolventen* $\bar{k}$ einer mittels der Stützfunktion $h(u)$ gegebenen Kurve durch $\bar{h}(u) = \int h(u)du$ erfaßt. Durch fortlaufende Evolventenbildung gelangt man zu *Evolventen r-ter Stufe*. Die Evolventen r-ter Stufe der zykloidalen Radlinien sind durch Stützfunktionen der Form

$$h(u) = d\cos u + e\sin u + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos m_j u + b_j \sin m_j u) + \sum_{s=1}^{r+1} c_s u^{s-1} \tag{11}$$

charakterisiert. Hieraus folgert man:

Satz 4: *Hüllen drei nicht kopunktale Geraden g_i einer ähnlich-veränderlichen Ebene $\sum$ Evolventen r_i-ter Stufe von zykloidalen Radlinien ein* ($i = 1, 2, 3$), *so ist jede Geradenhüllbahn von $\sum$ Evolvente der Stufe $\leqq \max\{r_1, r_2, r_3\}$ einer zykloidalen Radlinie.*

Man könnte etwa drei Kreisevolventen als Führungskurven k_i vorgeben und erhält dann als Geradenhüllbahnen i.a. wieder Kreisevolventen, für die Geraden eines bestimmten Büschels von $\sum$ hingegen bloß Kreise.

5. Analog zu den Sätzen 1, 2 und 4 lassen sich Sätze für die Geradenhüllbahnen der von H. HORNINGER [3] studierten *Zykloidenbewegungen n-ter Stufe* aussprechen, die durch Stützfunktionen der Bauart

$$\begin{aligned} h(u) = {} & (c_1 u + d_1)\sin u + (c_2 u + d_2)\cos u + c + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos m_j u + b_j \sin m_j u) \end{aligned} \tag{12}$$

gekennzeichnet sind [6] und ebenso für Geradenhüllbahnen bei *Spiraloidenbewegungen n-ter Stufe* [7], wo man

$$\begin{aligned} h(u) = {} & d\cos u + e\sin u + k\, e^{c_n u} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} e^{c_j u}(a_j \cos m_j u + b_j \sin m_j u) \end{aligned} \tag{13}$$

hat.

6. Nach [12] sind die *Autoevoluten* durch Stützfunktionen zu kennzeichnen, die die Differentialgleichungen

$$\dot{h}(u) = h(u + \beta) \text{ oder } \dot{h}(u) = -h(u - \beta) \text{ mit } \beta \equiv \pi/2 \pmod{2\pi} \tag{14}$$

erfüllen. Sind $h_i(u)$ ($i = 1, 2, 3$) drei zur selben Verzögerung β gehörige Lösungen derselben Gleichung, so ist auch die Linearkombination (5) eine Lösung. Bezeichnet man die Lösungskurven derselben Gleichung und mit demselben β als „gleichartig", so gilt:

Satz 5: *Gleiten drei nicht kopunktale Geraden einer ähnlich-veränderlichen Ebene $\sum$ auf drei gleichartigen Autoevoluten, so sind alle Geradenhüllbahnen gleichartige Autoevoluten.*

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052698

Digitale Bibliothek Braunschweig

Hieraus schließt man, daß *sämtliche Evolutoiden einer Autoevolute wieder Autoevoluten sind.* Der Satz gestattet übrigens noch eine Verallgemeinerung auf die von J. HOSCHEK [4] betrachteten *Autoevolutoiden,* sowie auf *Evolventen von Autoevoluten bzw. Autoevolutoiden.*

Literaturverzeichnis

[1] L. BURMESTER: Lehrbuch der Kinematik. Leipzig 1888.

[2] F. FABRICIUS-BJERRE: Über zykloidale Kurven in der Ebene und im Raum. Danske Vid. Selsk., Mat. fys. Medd. **26** (1951), 1–75.

[3] H. HORNINGER: Über Radlinien und Zykloiden n-ter Stufe. Monatsh. Math. **72** (1968), 335–346.

[4] J. HOSCHEK: Autoevolutoiden. Simon Stevin **40** (1966), 81–90.

[5] H. POTTMANN: Über affine zykloidale Radlinien. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. **191** (1982), 203–211.

[6] H. POTTMANN: Geradenhüllbahnen bei Zykloidenbewegungen n-ter Stufe. Mechanism and Machine Theory **18** (1983), 221–223.

[7] H. POTTMANN: Höhere Spiraloiden. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. (im Druck).

[8] H. POTTMANN: Zur Geometrie höherer Planetenumschwungbewegungen. Diss. TU Wien, 1983.

[9] H. SCHAAL: Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderlicher Felder. El. Math. **21** (1966), 97–109.

[10] W. WUNDERLICH: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Monatsh. Math. Phys. **44** (1936), 249–279.

[11] W. WUNDERLICH: Höhere Radlinien. Österr. Ing. Archiv **1** (1947), 277–296.

[12] W. WUNDERLICH: Autoevoluten. El. Math. **17** (1962), 121–128.

[13] W. WUNDERLICH: Ebene Kinematik (HTB 447/447 a). Bibliograph. Institut, Mannheim 1970.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052698